Chap. 8, Séance 7 - 30 min

Après avoir vu les fonctions linéaires, abordons un nouveau groupe de fonction, plus grand : celui des fonctions affines.
Ces fonctions affines permettent aussi de modéliser (représenter) des situations.

Commençons par un petit exercice … (A faire sans regarder la correction, donc !)

Un cinéma de quartier propose un abonnement. Au lieu de payer 10€ la place, il propose de payer une carte d'abonnement à 8€, puis en présentant cette carte, de bénéficier d'un tarif de 5€ la place.

Deux amies, Florence et Graziella, ont décidé d'aller de temps en temps au cinéma pendant 1 an. Florence décide de prendre un abonnement, mais pas Graziella.

1. Si on note x le nombre de places que chacune va acheter pendant cette année, combien chacune paiera-t-elle …
   a) Pour $x = 1$ | b) Pour $x = 2$ | c) Pour $x = 6$
2. Quelle fonction pourriez-vous écrire représentant chacune des situations (f représentera celle de Florence, et g celle de Graziella.
3. Sont-elles des fonctions linéaires ?

REPONSES

1. Rappelons que Florence choisit l'abonnement, et Graziella décide de payer plein tarif à chaque fois.
   On notera f pour Florence, g pour Graziella

a) Pour $x = 1$ (donc UNE sortie par an)
$f(1) = 8 + 5 \times 1$ $g(1) = 10 \times 1$
$f(1) = 13$ $g(1) = 10$
Florence paiera 13€ , et Graziella paiera 10€ (on peut dire que pour UNE sortie au cinéma pour un an, l'abonnement n'est pas intéressant)

b) Pour $x = 2$ (donc DEUX sorties par an)
$f(2) = 8 + 5 \times 2$ $g(2) = 10 \times 2$
$f(2) = 18$ $g(2) = 20$
Florence paiera 18€ , et Graziella paiera 20€ (on peut dire que pour DEUX sorties au cinéma pour un an, l'abonnement fait gagner 2€)

c) Pour $x = 6$ (donc DEUX sorties par an)
$f(6) = 8 + 5 \times 6$ $g(6) = 10 \times 6$
$f(6) = 38$ $g(6) = 60$
Florence paiera 38€ , et Graziella paiera 60€ (on peut dire que pour DEUX sorties au cinéma pour un an, l'abonnement fait gagner 2€)

2. Pour représenter la situation de Graziella, qui paie autant de fois 10€ qu'elle prendra de places : $g: x \to 10x$
   Pour représenter la situation de Florence, qui a payé une fois 8€, ET paie autant de fois 5€ qu'elle prendra de place : $f: x \to 8 + 5x$

3. On reconnait g comme une fonction linéaire de coefficient 10, mais f n'est pas linéaire… c'est une fonction AFFINE !

Passons au cours maintenant.

I. Définition d'une fonction affine.

Définition :

On considère a et b, deux nombres relatifs.
Une **fonction affine** f est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $a \times x + b$.
On la note $f: x \to ax + b$

Exemple : On considère la fonction $g: x \to 5x + 2$; Cette fonction g est une fonction affine avec $a = 5$ et $b = 2$.

Application :

- Calculons l'image de 0 , l'image de 4 et l'image de (-2) par cette fonction g :

$g(0) = 5 \times 0 + 2$
$g(0) = 2$

$g(4) = 5 \times 4 + 2$
$g(4) = 20 + 2$
$g(4) = 22$

$g(-2) = 5 \times (-2) + 2$
$g(-2) = (-10) + 2$
$g(-2) = (-8)$

- Calculons l'antécédent de 13 : on cherche le x tel que $g(x) = 13$.
  Pour résoudre $g(x) = 13$, il faut utiliser l'expression générale de g, qui est $g : x \to 5x + 2$
  Donc $g(x) = 13$
  Soit $5x + 2 = 13$
  D'où $5x = 13 - 2$ *(en fait, on fait -2 de chaque côté : $5x + 2 - 2 = 13 - 2$, or +2-2 = 0, donc on obtient cette ligne)*
  Ainsi $5x = 11$
  Et finalement, *(en divisant de chaque côté par 5 : $5x \div 5 = 11 \div 5$, on obtient $5x \div 5 = x$, donc il nous reste ceci :)*
  $$x = \frac{11}{5}$$
  L'antécédent de 13 est $x = \frac{11}{5}$

(suite page suivante)

Cas particuliers :

- Lorsque $b = 0$, la fonction $h: x \to ax + b$ s'écrit en fait $h: x \to ax$ ... et on connaît ce type de fonction !
  Si $b = 0$, alors la fonction affine est **une fonction linéaire.**

- Lorsque $a = 0$, la fonction $i : x \to ax + b$ devient $i : x \to b$
  Et dans ce cas, tous les nombres ont la même image : b.
  Par exemple, $i : x \to 0x + 3$ s'écrit donc $i : x \to 3$: $i(1) = 3$; $i(-57) = 3$; $i(1034) = 3$!
  Tous les nombres ont la même image.
  Si $a = 0$, alors la fonction affine est **une fonction constante**.

Exercices :
39 a) et b) p 144 (vous pouvez traiter seul.e l'intégralité de l'exercice, il est corrigé en fin de manuel, mais sans détail des réponses)
40 a) et b) p 144 (je donne rapidement aussi les réponses de c) et d) si vous voulez vous entraîner un petit peu plus)
44 p 145

REPONSES AUX EXERCICES

39 a) et b) p 144

On donne $f : x \to 2x + 3$
Il suffit de remplacer x par la valeur demandée :

a) Pour $x = 4$
$f(4) = 2 \times 4 + 3$
$f(4) = 8 + 3$
$f(4) = 11$

b) Pour $x = (-3)$
$f(-3) = 2 \times (-3) + 3$
$f(-3) = (-6) + 3$
$f(-3) = (-3)$

40 a) et b) p 144

On donne $g : x \to (-4)x + 2$
Il suffit de remplacer x par la valeur demandée :

a) Pour $x = 4$
$g(2) = (-4) \times 4 + 2$
$g(2) = (-8) + 2$
$g(2) = (-6)$

b) Pour $x = (-5)$
$g(2) = (-4) \times (-5) + 2$
$g(2) = 20 + 2$
$g(2) = 22$

Et si vous les avez faits :
$g(1) = (-4) \times 1 + 2 = (-4) + 1 = (-3)$
$g(2{,}5) = (-4) \times 2{,}5 + 2 = (-10) + 1 = (-9)$

44 p 145

On donne la fonction $f: x \to 2x - 1$
Pour retrouver les antécédents, il faut en fait résoudre des équations.

L'antécédent de 5 par f :
On cherche donc x tel que $f(x) = 5$
On remplace par l'expression de f :
$$2x - 1 = 5$$
$$2x = 5 + 1$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2}$$
Donc l'antécédent de 5 par f est $x = 3$
(c'est-à-dire que $f(3) = 5$)

L'antécédent de 10 par f :
On cherche donc x tel que $f(x) = 10$
On remplace par l'expression de f :
$$2x - 1 = 10$$
$$2x = 10 + 1$$
$$2x = 11$$
$$x = \frac{11}{2}$$
Donc l'antécédent de 10 par f est $x = 5{,}5$
(c'est-à-dire que $f(5{,}5) = 10$)

L'antécédent de (-4)par f :
On cherche donc x tel que $f(x) = (-4)$
On remplace par l'expression de f :
$$2x - 1 = (-4)$$
$$2x = (-4) + 1$$
$$2x = (-3)$$
$$x = \frac{(-3)}{2}$$
Donc l'antécédent de 10 par f est $x = (-1{,}5)$
(c'est-à-dire que $f(-1{,}5) = (-4)$)